Скрипта ријешених задатака са квалификационих испита 2010/11 г.

Универзитет у Бањој Луци
Електротехнички факултет

Др. Момир Ћелић
Др. Зоран Митровић
Иван-Вања Бороја

Садржај

Квалификациони испит одржан 29. јуна 2010.

Квалификациони испит одржан 6. септембра 2010.

Квалификациони испит одржан 23. септембра 2010.

Квалификациони испит одржан 8. октобра 2010.

Електротехнички факултет Бања Лука

Пријемни испит из математике

29. јун 2010.

1. Упростити израз $\dfrac{\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}$.
2. За које вриједности k једначина $|x+1|-|x-1|=kx+1$ има јединствено рјешење?
3. Једно рјешење квадратне једначине $x^2-2x+k=0$ је квадрат другог рјешења. Наћи све могуће вриједности k.
4. Ријешити неједначину $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.
5. Ријешити неједначину $\log_{9-x}\left(x^2-5x+4\right)\le 1$.
6. Ријешити једначину $\cos(7x)+\sin(8x)=\cos(3x)-\sin(2x)$.
7. Одредити $x,\ y,\ z$ из система једначина

$$\begin{aligned}&x^2-50x+y^2-12y+645=0\\&z-210=50x+50y+50\\&x^2+y^2-62x-12y+993=0.\end{aligned}$$

8. Доказати једнакост $\dfrac{\sin(30^0+\alpha)-\cos(60^0+\alpha)}{\sin(30^0+\alpha)+\cos(60^0+\alpha)}=\sqrt{3}\,tg(\alpha)$.
9. Одредити једначину кружнице коју додирује права $x+y=2$, а центар јој је у тачки (3,5).
10. Дате су тачке A(-2,1), B(6,1) и C(-2,7). Одредити једначину кружнице која садржи ове три тачке, а затим одредити тачку M такву да она буде средина тетиве BC.

Електротехнички факултет Бања Лука

Пријемни испит из математике

6. септембар 2010.

1. Упростити израз $$\frac{\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+x^2+2x^3}}$$.

2. Одредити a тако да се оба коријена једначине $x^2-2ax+a^2-1=0$ (a реалан број) налазе у интервалу $(-2,4)$.

3. Ријешити једначину $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$.

4. Ријешити неједначину $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-6}<0$.

5. Ријешити неједначину $\log_x \sqrt{x+12}>1$.

6. Ријешити једначину $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$.

7. Ријешити систем једначина

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\cdot y=-2 \end{cases}$$

8. Доказати једнакост

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=tg3x$$.

9. Израчунати површину троугла ΔABC ако је

$$a-b=1,\ c=3,\ \gamma=60^o$$.

10. Одредити једначину кружнице која пролази кроз тачке A(3,5) и B(7,3) а центар јој се налази на Ox оси.

Електротехнички факултет Бања Лука

Пријемни испит из математике

23. септембар 2010.

1. Рационалисати именилац у разломку $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.
2. Рјешења једначине $x^2+px+q=0$ су x_1 и x_2 $(x_1 \neq 0, x_2 \neq 0)$.Саставити квадратну једначину којој су рјешења $\dfrac{x_1}{x_2}$ и $\dfrac{x_2}{x_1}$
3. Ријешити једначину $\left|2-\left|1-|x|\right|\right|=1$.
4. Ријешити неједначину $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}<0$.
5. Ријешити неједначину $\log_x \sqrt{1-x}>1$.
6. Ријешити једначину $\sin 2x+tgx=2$.
7. Ријешити систем једначина
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=0. \end{cases}$$
8. Доказати једнакост $\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 2x-\sin 4x}=tg3x$.
9. Двије кружнице (полупречника $3cm$ и $1cm$) додирују се споља. Повучена је њихова спољна заједничка тангента. Одредити површину површи ограничене кружницама и тангентом.
10. Израчунати површину троугла $\triangle ABC$ ако је $a+b=8,\ c=7,\ \gamma=120^o$. Напомена: користити косинусну и синусну теорему.

Електротехнички факултет Бања Лука

Квалификациони испит из математике

08. 10. 2010.

1. Доказати да је вриједност израза $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ цијели број.

2. За које $a,b,c\in\mathbb{Z}$ функција $f(x)=ax^2+bx+c,\ x\in\mathbb{Z}$ задовољава услов

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$$

3. Нацртати график функције

$$f(x)=\begin{cases}-2x-7, x<-2\\ -x^2+1, |x|\le 2\\ 2x-7, x>2\end{cases}$$

Па одредити скуп $\{x: f(x)=0\}$.

4. Ријешити једначину $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$.

5. Ријешити неједначину $\log_{7-x}\left(x^2-4x-5\right)<1$.

6. Ријешити једначину $\sin x-\cos x=1$.

7. Ријешити систем
$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14\end{cases}$$

8. Доказати идентитет $\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3=8\cos^4\alpha$

9. Израчунати странице a,b,c троугла ако је $a+b=7,\ \gamma=60^o,\ P=3\sqrt{3}$

10. Одредити једначину кружнице која пролази кроз координатни почетак, а праве $3x-4y+8=0$ и $3x+4y+8=0$ су јој тангенте.

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Квалификациони испит одржан 29. јуна 2010.

1. Упростити израз $\dfrac{\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}$.

<u>РЈЕШЕЊЕ</u>

$$\frac{\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}=\frac{\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{(x+y)^2}}{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{(x-y)(x+y)}}=\frac{\dfrac{x^2(x+y)-x^3}{(x+y)^2}}{\dfrac{x(x-y)-x^2}{(x-y)(x+y)}}=\frac{\dfrac{x^3+x^2y-x^3}{(x+y)^2}}{\dfrac{x^2-xy-x^2}{(x-y)(x+y)}}=$$

$$=\frac{\dfrac{x^2y}{(x+y)^2}}{\dfrac{-xy}{(x-y)(x+y)}}=\frac{\dfrac{x}{(x+y)}}{\dfrac{-1}{(x-y)}}=\frac{x(y-x)}{x+y}$$

2. За које вриједности k једначина $|x+1|-|x-1|=kx+1$ има јединствено рјешење?

<u>РЈЕШЕЊЕ</u>

Посматрајмо функције $\begin{aligned} y_1&=|x+1|-|x-1| \\ y_2&=kx+1 \end{aligned}$

У првој функцији појављује се апсолутна вриједност тј имамо:

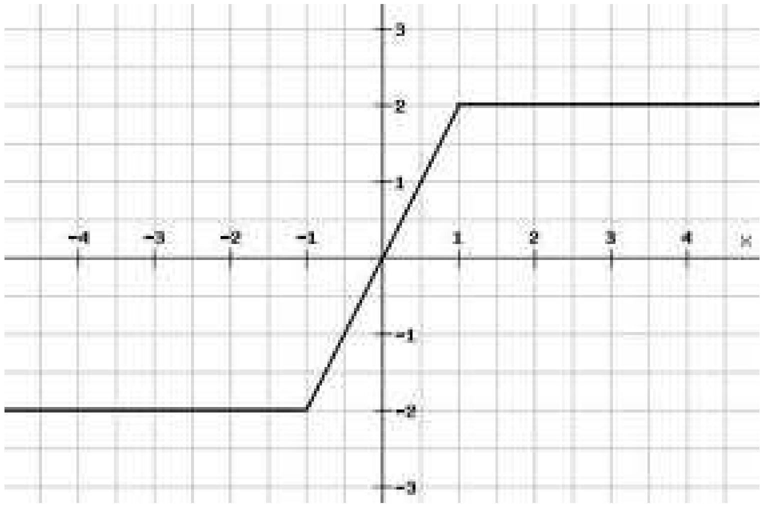
$$|x+1|=\begin{cases} x+1, x+1\geq 0 \\ -(x+1),\ x+1<0 \end{cases}=\begin{cases} x+1,\ x\geq -1 \\ -x-1,\ x<-1 \end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, x-1\geq 0 \\ -(x-1),\ x-1<0 \end{cases}=\begin{cases} x-1,\ x\geq 1 \\ -x+1,\ x<1 \end{cases}$$

Па ће функција y_1 бити

$$y_1=\begin{cases} x+1-(x-1),\ x\geq 1 \\ x+1-(-x+1),\ -1\leq x<1 \\ -(x+1)-(-x+1),\ x<-1 \end{cases}=\begin{cases} x+1-x+1,\ x\geq 1 \\ x+1+x-1,\ -1\leq x<1 \\ -x-1+x-1,\ x<-1 \end{cases}=\begin{cases} 2,\ x\geq 1 \\ 2x,\ -1\leq x<1 \\ -2,\ x<-1 \end{cases}$$

Њен график је приказан на слици

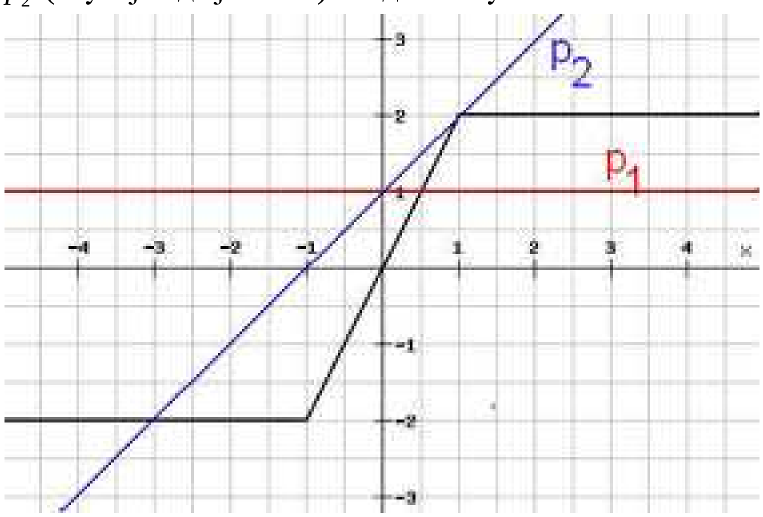


слика 1

Друга функција је $y_2 = kx + 1$. То је очигледно прамен правих које пролазе кроз тачку A(0,1).

Прво ћемо размотрити случај $k \geq 0$.

Са слике 2 се види да имамо два гранична случаја: праве p_1 (случај када је $k = 0$) и p_2 (случај када је $k = 1$). Види слику 2.



слика 2

1) Права p_1 из прамена (случај $k = 0$) очигледно задовољава услов да са графиком функције y_1 има само једну заједничку тачку.

2) За праве из прамена за које је $0 < k < 1$ (праве које се налазе између правих p_1 и p_2) са слике се види да ће имати три заједничке тачке са функцијом y_2)

3) Права p_1 очигледно са графиком функције y_2 има двије заједничке тачке.

4) За праве из прамена за које је $1 < k < +\infty$ очигледно важи да са графиком функције y_2 имају тачно једну заједничку тачку.

Размотимо сада случај $k \le 0$
Очигледно је да у овом случају све праве из прамена задовољавају тражени услов да са графиком криве y_2 имају тачно по једну заједничку тачку.

Коначно рјешење задатка је дакле

$$k \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

3. Једно рјешење квадратне једначине $x^2 - 2x + k = 0$ је квадрат другог рјешења. Наћи све могуће вриједности k.

<u>ПРВО РЈЕШЕЊЕ</u>

Нађимо оба рјешења: $x_{1/2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4k}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-k}$

Према услову задатка мора бити

$$1+\sqrt{1-k} = \left(1-\sqrt{1-k}\right)^2$$
$$1+\sqrt{1-k} = 1-2\sqrt{1-k}+1-k$$
$$3\sqrt{1-k} = 1-k \qquad /^2$$
$$9(1-k) = 1-2k+k^2$$
$$9-9k = 1-2k+k^2$$
$$k^2+7k-8=0$$
$$k_1=-8,\ k_2=1$$

<u>Провјера рјешења</u>

За $k_1=-8$ имамо једначину $x^2-2x-8=0$. Њена рјешења су

$$x_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-8)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{2\pm6}{2},\quad x_1=4,\ x_2=-2$$

За ова рјешења вриједи $(-2)^2=4$

За $k_1=1$ имамо једначину $x^2-2x+1=0$. Њена рјешења су

$$x_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot1}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} = \frac{2}{2} = 1,\quad x_1=1,\ x_2=1$$

За ова рјешења вриједи $(1)^2=1$

<u>ДРУГО РЈЕШЕЊЕ</u>

Према Вијетовим формулама имамо

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2,\quad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} = k$$

Из услова задатка да је $x_2 = x_1^2$ из прве Вијетове формуле имамо
$x_1 + x_1^2 = 2$ односно добијамо квадратну једначину
$x_1^2 + x_1 - 2 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \qquad x_1 = -2,\ x_2 = 1$ ... (1)

Из услова задатка да је $x_2 = x_1^2$ из друге Вијетове формуле имамо
$x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_1^2 = x_1^3 = k$ ...(2)
(1) и (2) заједно дају $k_1 = x_1^3 = (-2)^3 = -8,\ k_2 = x_2^3 = (1)^3 = 1$
Дакле, добили смо иста рјешења $k_1 = -8,\ k_2 = 1$

4. Ријешити неједначину $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0$.

<u>РЈЕШЕЊЕ</u>

Дата неједначина има смисла ако је
$x - 3 \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0 \wedge 2x + 4 \geq 0$ тј ако је
$x \geq 2$
Важи

$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} > \sqrt{2x+4}$

$\Leftrightarrow x + 3 + 2\sqrt{(x+3)(x-2)} + x - 2 > 2x + 4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-2)} > 3$

$\Leftrightarrow 4(x+3)(x-2) > 9$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 33 > 0$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{34}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{34}}{2}, +\infty\right)$

С обзиром на ово и на услов $x \geq 2$ имамо

$x \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{34}}{2}, +\infty\right)$

5. Ријешити неједначину $\log_{9-x}\left(x^2 - 5x + 4\right) \leq 1$.

<u>РЈЕШЕЊЕ</u>

Ова неједначина има смисла ако је
$9 - x > 0 \wedge 9 - x \neq 1 \wedge x^2 - 5x + 4 > 0$ тј ако
$x \in (-\infty, 1) \cup (4, 8) \cup (8, 9)$

Како је

$$\log_{9-x}\left(x^2-5x+4\right)\le 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{9-x}\left(x^2-5x+4\right)\le \log_{9-x}\left(9-x\right)$$

Размотрићемо два случаја

1) ако је $9-x>1$ тј ако је $x<8$, мора бити

$x^2-5x+4\le 9-x$ односно

$x^2-4x-5\le 0$ што је испуњено за

$x\in\left[-1,5\right]$

С обзиром на основни услов $x\in\left(-\infty,1\right)\cup\left(4,8\right)\cup\left(8,9\right)$

рјешење у овом случају су сви бројеви

$x\in\left[-1,1\right)\cup\left(4,5\right]$

2) ако је $9-x<1$ тј ако је $x>8$ мора бити $x^2-4x-5\ge 0$

Оба ова услова су испуњена ако је $x>8$.

С обзиром на основни услов $x\in\left(-\infty,1\right)\cup\left(4,8\right)\cup\left(8,9\right)$

рјешења у овом случају су сви бројеви $x\in\left(8,9\right)$.

Узимајући у обзир рјешења из првог и другог случаја, рјешења дате неједначине су сви бројеви

$x\in\left[-1,1\right)\cup\left(4,5\right]\cup\left(8,9\right)$

6. Ријешити једначину $\cos(7x)+\sin(8x)=\cos(3x)-\sin(2x)$.

РЈЕШЕЊЕ

$$\cos(7x)+\sin(8x)=\cos(3x)-\sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x+\sin 2x=\cos 3x-\cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x\cdot\cos 3x=\sin 5x\cdot\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x\left(\cos 3x-\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x=0\vee\cos 3x-\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x=0\vee\sin 2x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x=0\vee\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x=0\vee\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\vee\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5x=k\pi\vee\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi\vee\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathrm{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$$
$$x \in \left\{ \frac{k\pi}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in Z \right\}$$

7. Одредити $x,\ y,\ z$ из система једначина

$$x^2 - 50x + y^2 - 12y + 645 = 0$$
$$z - 210 = 50x + 50y + 50$$
$$x^2 + y^2 - 62x - 12y + 993 = 0.$$

<u>РЈЕШЕЊЕ</u>

Прву једначину из система запишимо као
$x^2 + y^2 = 50x + 12y - 645$
а затим је уврстимо у трећу
$50x + 12y - 645 - 62x - 12y + 993 = 0$
$-12x + 348 = 0$
$12x = 348$
$x = \frac{348}{12} = 29$ Дакле $\boxed{x = 29}$
Уврстимо добијено у прву једначину па имамо
$29^2 + y^2 = 50 \cdot 29 + 12y - 645$
$y^2 - 12y + 841 - 1450 + 645 = 0$
$y^2 - 12y + 36 = 0$
$y_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{12}{2} = 6$ Дакле $\boxed{y = 6}$

Ако уврстимо добијено у трећу једначину из система имамо
$z = 210 + 50 \cdot 29 + 50 \cdot 6 + 50$
Дакле $\boxed{z = 2010}$

8. Доказати једнакост $\frac{\sin(30^0 + \alpha) - \cos(60^0 + \alpha)}{\sin(30^0 + \alpha) + \cos(60^0 + \alpha)} = \sqrt{3}\, tg(\alpha)$.

<u>РЈЕШЕЊЕ</u>

Користећи формуле
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
добијамо

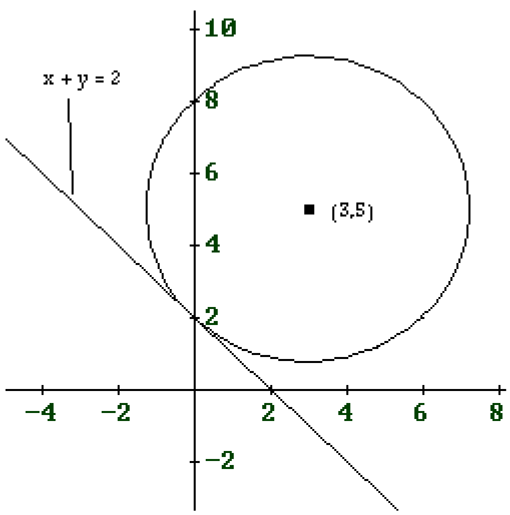
$$\frac{\sin(30^0+\alpha)-\cos(60^0+\alpha)}{\sin(30^0+\alpha)+\cos(60^0+\alpha)}=\frac{\left[\sin 30^0\cos\alpha+\cos 30^0\sin\alpha\right]-\left[\cos 60^0\cos\alpha-\sin 60^0\sin\alpha\right]}{\left[\sin 30^0\cos\alpha+\cos 30^0\sin\alpha\right]+\left[\cos 60^0\cos\alpha-\sin 60^0\sin\alpha\right]}=$$

$$\frac{\left[\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right]-\left[\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right]}{\left[\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right]+\left[\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right]}=\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}tg\alpha$$

9. Одредити једначину кружнице коју додирује права $x+y=2$, а центар јој је у тачки (3,5).

ПРВО РЈЕШЕЊЕ



Траженој кружници познат је центар само треба одредити полупречник. Пошто кружница треба да додирује дату праву то њен полупречник треба да буде једнак удаљености тачке $M\left(3,5\right)=M\left(x_0,y_0\right)$ од праве

$x+y-2=0 \quad \left(Ax+By+C=0\right)$ што рачунамо по формули

$$d\left(M,p\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|1\cdot3+1\cdot5-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

дакле $r=3\sqrt{2}$ па је једначина тражене кружнице

$$(x-3)^2+(y-5)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$$

$$(x-3)^2+(y-5)^2=18$$

ДРУГО РЈЕШЕЊЕ

Први корак је да одредимо тачку додира кружнице и праве. Користићемо чињеницу да права кроз центар кружнице и тачку додира је нормална на дату праву p.

Дату праву p: $x+y=2$ запишимо у експлицитном облику $y=-x+2$.

Одавде видимо да је њен коефицијент правца $k_p=-1$. Права нормална на њу ће имати коефицијент правца $k_n=\frac{-1}{k_p}=\frac{-1}{-1}=1$

Дакле нормала ће бити облика $y=k_n x+n=x+n$. Пошто та нормала треба да садржи и тачку $M(3,5)$ то ће бити

$5=1\cdot 3+n$ тј

$n=2$

Па ће права која садржи дату тачку $M(3,5)$ и нормална је на дату праву $p: x+y=2$ бити дата једначином $n: y=x+2$

Одредимо тачку пресјека правих $p: y=-x+2$ и $n: y=x+2$.

$-x+2=x+2$

$2x=0$

$x=0$

Одавде добијамо да је $y=x+2=2$

Дакле, тачка пресјека правих је $T(0,2)$ и та тачка ће бити и тачка додира праве и кружнице па ће полупречник кружнице бити једнак удаљености од тачке $M(3,5)$ до тачке $T(0,2)$.

Дакле,

$$r=d(M,T)=\sqrt{(3-0)^2+(5-2)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$$

Па је једначина тражене кружнице

$$(x-3)^2+(y-5)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$$

$$(x-3)^2+(y-5)^2=18$$

10. Дате су тачке A(-2,1), B(6,1) и C(-2,7). Одредити једначину кружнице која садржи ове три тачке, а затим одредити тачку M такву да она буде средина тетиве BC.

РЈЕШЕЊЕ

Нека је једначина тражене кружнице $k:(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ ...(1)
гдје је $C(p,q)$ центар а r полупречник кружнице k.
Пошто се све три дате тачке налазе на кружници то њихове координате задовољавају једначину (1) тј имамо:

$$A:(-2-p)^2+(1-q)^2=r^2$$
$$B:(6-p)^2+(1-q)^2=r^2$$
$$C:(-2-p)^2+(7-q)^2=r^2$$

То јест имамо систем једначина

$$\begin{cases}(-2-p)^2+(1-q)^2=r^2\\(6-p)^2+(1-q)^2=r^2\\(-2-p)^2+(7-q)^2=r^2\end{cases}$$

Одузимањем друге од прве добијамо

$$(-2-p)^2-(6-p)^2=0$$
$$4+4p+p^2-36+12p-p^2=0$$
$$16p-32=0$$
$$16p=32$$
$$p=\frac{32}{16}$$
$$p=2$$

Увршtавањем у прву и трећу једначину добијамо

$$16+(1-q)^2=r^2$$
$$16+(7-q)^2=r^2$$

Одузимањем добијамо

$$(1-q)^2-(7-q)^2=0$$
$$1-2q+q^2-\left(49-14q+q^2\right)=0$$
$$1-2q+q^2-49+14q-q^2=0$$
$$12q-48=0$$
$$12q=48$$
$$q=\frac{48}{12}$$
$$q=4$$

Враћањем у једну од једначина почетног система рачунамо полупречник

$r^2 = (-2-2)^2 + (1-4)^2 = 16+9 = 25$
$r = 5$
$r = 5$

Па је једначина тражене кружнице $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Средину тетиве BC биће тачка M чије координате рачунамо по формули

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{6-2}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$$

Дакле тражена средина тетиве BC је $M(2,4)$.

Примијетимо да је тражена тачка уствари центар кружнице тј да је тетива уствари пречник тражене кружнице.

Квалификациони испит одржан 6. септембра 2010.

1. Упростити израз $\dfrac{\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+x^2+2x^3}}$.

РЈЕШЕЊЕ

$$\frac{\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+x^2+2x^3}}=\frac{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}-\dfrac{1-3x+x^2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1-2x+x^2(1-2x)}{1+2x+x^2(1+2x)}}=$$

$$\frac{\dfrac{(x-1)^2-\left(1-3x+x^2\right)-\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}}{\dfrac{(1-2x)\left(1+x^2\right)}{(1+2x)\left(1+x^2\right)}}=\frac{\dfrac{x^2-2x+1-1+3x-x^2-x^2-x-1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}}{\dfrac{(1-2x)}{(1+2x)}}=$$

$$\frac{-\dfrac{x^2+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}}{\dfrac{1-2x}{1+2x}}=-\frac{\left(x^2+1\right)(1+2x)}{\left(x^3-1\right)(1-2x)}=\frac{\left(x^2+1\right)(2x+1)}{\left(x^3-1\right)(2x-1)}$$

2. Одредити a тако да се оба корijена једначине $x^2-2ax+a^2-1=0$ (a реалан број) налазе у интервалу $(-2,4)$.

РЈЕШЕЊЕ

Дату квадратну једначину запишимо у облику $(x-a)^2=1$

Одатле слиједи

$x_1=a-1$

$x_2=a+1$

Па је, по услову задатка

$-2<a-1<4 \;\wedge\; -2<a+1<4$

Односно

$-1<a<5 \;\wedge\; -3<a<3$

$\boxed{a\in(-1,3)}$

3. Риједшити једначину $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$.

РЈЕШЕЊЕ

1)

$x<-6$

$-2x-1-x-3=-x-6$

$2=2x$

$x=1$

$\varnothing$

2)

$-6\le x<-3$

$-2x-1-x-3=x+6$

$-10=4x$

$x=-\frac{5}{2}$

$\varnothing$

3)

$-3\le x<-\frac{1}{2}$

$-2x-1+x+3=x+6$

$2x=-4$

$\boxed{x=-2}$

4)

$-\frac{1}{2}\le x$

$2x+1+x+3=x+6$

$2x=2$

$\boxed{x=1}$

4. Ријешити неједначину $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-6}<0$.

РЈЕШЕЊЕ

$x-1 \geq 0 \wedge x+2 \geq 0 \wedge 2x-6 \geq 0$

$x \geq 1 \wedge x \geq -2 \wedge x \geq 3$

$\boxed{x \geq 3}$

$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-6}<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{2x-6}<\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(2x-6)}+2x-6<x+2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(2x-6)}<-2x+9$

$\Leftrightarrow 4\left(2x^2-8x+6\right)<4x^2-36x+81$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x-57<0$

$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{58}}{2}, \frac{-1+\sqrt{58}}{2}\right)$

С обзиром на услов $x \geq 3$ имамо

$$\boxed{x \in \left[3, \frac{-1+\sqrt{58}}{2}\right)}$$

5. Ријешити неједначину $\log_x \sqrt{x+12}>1$.

$x>0,\ x \neq 1,\ x+12 \geq 0$

1)

$x \in (1,+\infty)$

$\log_x \sqrt{x+12}>\log_x x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+12}>x$

$\Leftrightarrow x+12>x^2$

$\Leftrightarrow x^2-x-12<0$

$\Leftrightarrow x \in (-3,4)$

Дакле $\boxed{x \in (1,4)}$

2)

$x \in (0,1)$

$\log_x \sqrt{x+12} > \log_x x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+12} < x$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 > 0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

Због услова $x \in (0,1)$ у овом случају нема рјешења.

Према томе $\boxed{x \in (1,4)}$

6. Ријешити једначину $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

РЈЕШЕЊЕ

$\cos x > 0, \cos x \neq 1, \sin x > 0, \sin x \neq 1$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \cdots$

$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

Како је $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ имамо

$\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} = 2$

$t = \log_{\cos x} \sin x$

$t + \frac{1}{t} = 2$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)^2 = 0$

$t = 1$

$\log_{\cos x} \sin x = 1$

$\cos x = \sin x$

$tgx = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

С обзиром на услов $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ имамо

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

7. Ријешити систем једначина

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x \cdot y = -2 \end{cases}$$

РЈЕШЕЊЕ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x \cdot y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = \frac{-2}{x} \end{cases}$$

Уврстимо I у II па добијамо

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$$

Смјена $x^2 = t$

$$t + \frac{4}{t} = 5 \quad / \cdot t$$

$$t^2 + 4 = 5t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 4 \vee t_2 = 1$$

Вратимо се из смјене $x^2 = t$

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 1$$

$$x_1 = 2 \vee x_2 = -2 \vee x_3 = 1 \vee x_4 = -1$$

Сад добијене вриједности за x искористимо да добијемо y

$$y_1 = -1 \vee y_2 = 1 \vee y_3 = -2 \vee y_4 = 2$$

Дакле, конашно рјешење система су уређени парови

$$\boxed{(x, y) \in \{(2,-1),(-2,1),(1,-2),(-1,2)\}}$$

8. Доказати једнакост

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = tg 3x .$$

РЈЕШЕЊЕ

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\frac{(\sin x+\sin 5x)+\sin 3x}{(\cos x+\cos 5x)+\cos 3x}=$$

Користићемо следеће формуле

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{2\cdot\sin 3x\cdot\cos 2x+\sin 3x}{2\cdot\cos 3x\cdot\cos 2x+\cos 3x}=\frac{\sin 3x\cancel{(2\cdot\cos 2x+1)}}{\cos 3x\cancel{(2\cdot\cos 2x+1)}}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=tg 3x$$

9. Израчунати површину троугла ΔABC ако је $a-b=1,\ c=3,\ \gamma=60^o$.

РЈЕШЕЊЕ

<u>Косинусна теорема</u>
Квадрат једне странице троугла једнак је збиру квадрата друге двије странице умањен за двоструки производ тих страница и косинуса њима захваћеног угла тј

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

Одавде имамо

$$c^2=a^2-2ab+b^2+2ab-2ab\cos\gamma$$

$$c^2=(a-b)^2+2ab-2ab\cos\gamma$$

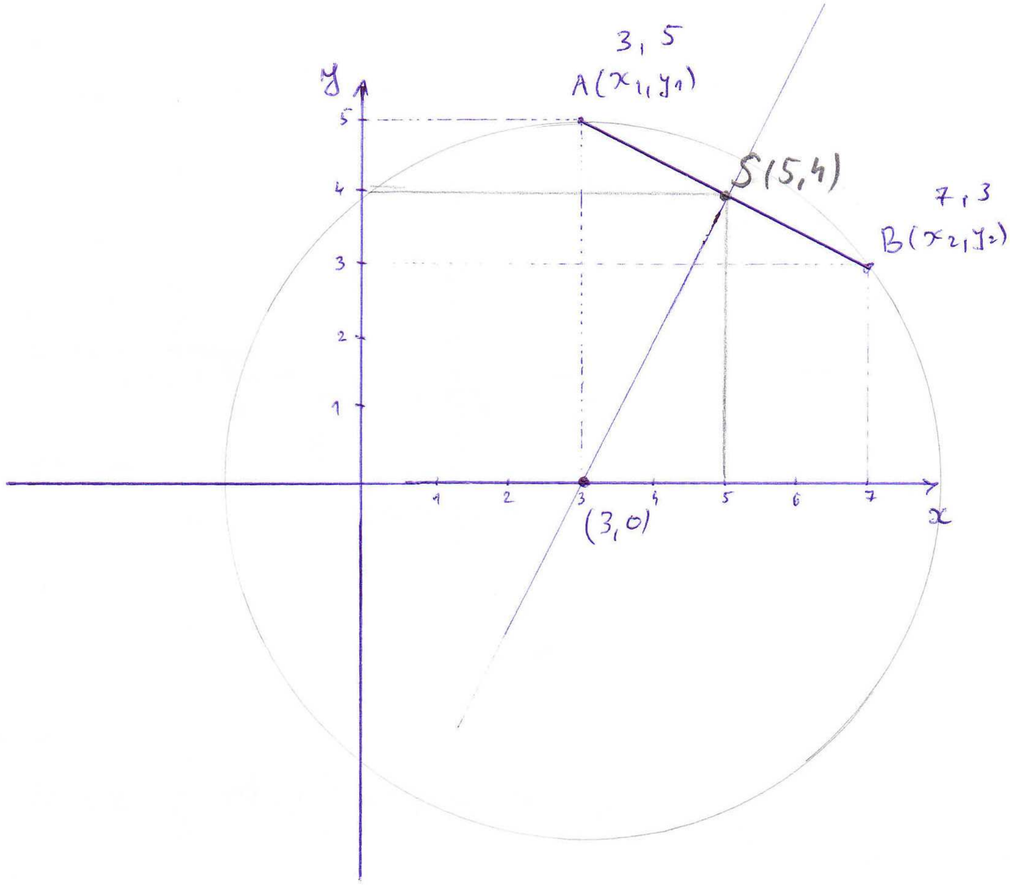
$$c^2=(a-b)^2+2ab(1-\cos\gamma)$$

Коначно имамо

$$a\cdot b=\frac{c^2-(a-b)^2}{2(1-\cos\gamma)}=\frac{9-1}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$

10. Одредити једначину кружнице која пролази кроз тачке A(3,5) и B(7,3) а центар јој се налази на Ox оси.

РЈЕШЕЊЕ



Тражена кружница к садржи тачке A и B тј дуж AB је тетива кружнице k па ће се њен центар налазити на симетрали s дужи AB а како се по поставци задатка центар налази на Ox оси то ће се центар налазити у пресјеку s са Ox осом.

Одредимо прво праву p која пролази кроз тачке A и B по формули

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

$$y - 5 = \frac{3-5}{7-3}(x-3)$$

$$y - 5 = \frac{-1}{2}(x-3)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{13}{2}$$

Симетрала дужи AB је нормална на праву p па ће њен коефицијент правца бити

$$\boxed{k_s = \frac{-1}{k_p}}$$

$$k_s = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2$$

а њена једначина $y = 2x + n$.

Како симетрала пролази кроз средиште S дужи AB са координатама

$$S\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

$$S\left(\frac{7+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$S(5,4)$$

то ће њене координате засдовољавати једначину симетрале

$$4 = 2 \cdot 5 + n$$

$$4 = 10 + n$$

$$n = -6$$

Дакле, једначина симетрале је $y = 2x - 6$

Још остаје да нађемо пресјечну тачку симетрале и Ox осе тј да ријешимо систем

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Дакле, центар кружнице ће се налазити у тачки $C(3,0)$

Остало је да се израчуна полупречник.

$$r = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (5-0)^2} = 5$$

Па ће једначина кружнице бити

$$\boxed{(x-3)^2 + y^2 = 25}$$

Квалификациони испит одржан 23. септембра 2010.

1. Рационалисати именилац у разломку $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

   РЈЕШЕЊЕ

   Ако $\sqrt[4]{2}$ означимо са x дати израз постаје
   $$\frac{1}{x+x^2+x^3+x^4}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=\frac{x^3}{x^4}\cdot\frac{x-1}{x^4-1}=\frac{x^4-x^3}{x^8-x^4}=\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$$

2. Рјешења једначине $x^2+px+q=0$ су x_1 и x_2 $\left(x_1\neq 0, x_2\neq 0\right)$.Саставити квадратну једначину којој су рјешења $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

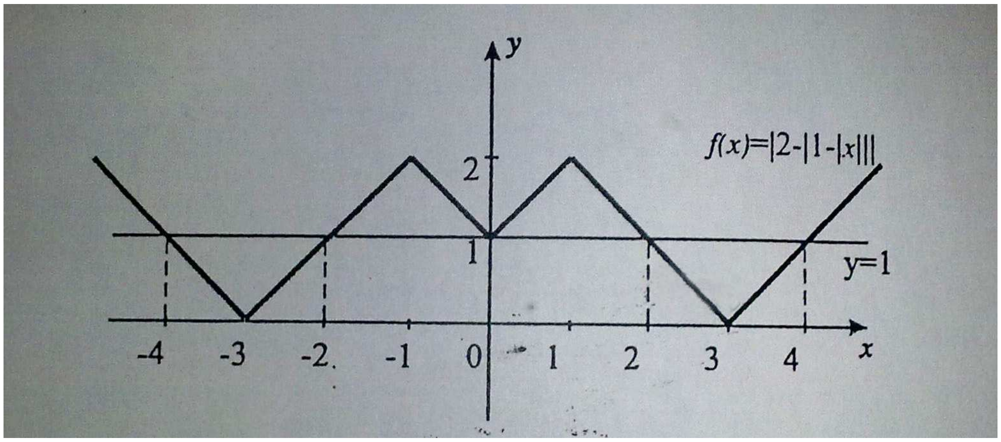
   РЈЕШЕЊЕ

   Нека је тражена једначина $y^2+ry+s=0$. Тада је $r=-(y_1+y_2)$ и $s=y_1\cdot y_2$. Но како је $y_1=\frac{x_1}{x_2},\ y_2=\frac{x_2}{x_1}$ то је
   $r=-(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1})=-\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1\cdot x_2}=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{2q-p^2}{q}$ и $s=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}=1$ па једначина гласи $y^2+\frac{2q-p^2}{q}y+1=0$ или $qy^2+(2q-p^2)y+q=0$.

3. Ријешити једначину $\left|2-\left|1-|x|\right|\right|=1$.

   РЈЕШЕЊЕ

   $\left|2-\left|1-|x|\right|\right|=1$ повлачи $2-\left|1-|x|\right|=1$ или $2-\left|1-|x|\right|=-1$. Сада је $1=\left|1-|x|\right|$ или $3=\left|1-|x|\right|$. У првом случају имамо редом $1=1-|x|$ или $-1=1-|x|$ па је $|x|=0$ или $|x|=2$. Дакле, $x=0$ или $x=-2$ или $x=2$. У другом случају је $3=1-|x|$ или $-3=1-|x|$ па је $2=-|x|$ или $|x|=4$ одакле је $x=-4$ или $x=4$.



4. Риjешити неjедначину $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}<0$.

РЈЕШЕЊЕ

Поткорјена величина мора бити већа или једнака од нуле па имамо $x\geq -1 \wedge x\geq 1 \wedge x\geq 2 \Rightarrow x\geq 1$. Уз тај услов је

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}<\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)(x+2)}+x+2<x-1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x+2)}<-x-4 \Leftrightarrow 4(x+1)(x+2)<x^2+8x+16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+12x+8<x^2+8x+16 \Leftrightarrow 3x^2+4x-8<0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-2-2\sqrt{7}}{3},\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right)$$

Закључак: како је $\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}>1$ важи $x\in\left[1,\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

5. Риjешити неjедначину $\log_x\sqrt{1-x}>1$.

РЈЕШЕЊЕ

$1\neq x>0 \wedge 1-x>0 \Leftrightarrow 0<x<1 \quad \log_x\sqrt{1-x}>\log_x x$

Како је $0<x<1$имамо $\sqrt{1-x}<x \Leftrightarrow 1-x<x^2 \Leftrightarrow x^2+x-1>0$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$$

С обзиром на добијено, услов $0<x<1$ и чињеницу да је $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$

имамо $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)$.

6. Риjешити jедначину $\sin 2x+tgx=2$.

РЈЕШЕЊЕ

Како је $\sin(2x)=\dfrac{2tg\,x}{1+tg^2x}$ имамо $\dfrac{2tgx}{1+tg^2x}+tgx=2$

$2tgx+(tgx-2)(1+tg^2x)=0$

$tg^3x-2tg^2x+3tgx-2=0$

Смјена $tgx=t$

$t^3-2t^2+3t-2=0$

$t^3-2t^2+2t+t-1-1=0$

$\left(t^3-1\right)-2t\left(t-1\right)+\left(t-1\right)=0$

$\left(t-1\right)\left(t^2+t+1\right)-2t\left(t-1\right)+\left(t-1\right)=0$

$\left(t-1\right)\left(t^2+t+1-2t+1\right)=0$

$\left(t-1\right)\left(t^2-t+2\right)=0$

Како једначина $t^2-t+2=0$ нема реалних рјешења једино реално Рјешење дате кубне једначине је $t=1$ па имамо $tgx=1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

7. Ријешити систем једначина

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=0. \end{cases}$$

РЈЕШЕЊЕ

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_2+6x_3=0 \\ 6x_2+12x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_2+2x_3=0 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

Дакле, једна промјенљива је произвољна, рецимо $x_3=\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$.
Одатле је $x_2=-2\alpha$. Вратимо се са $x_3=\alpha, x_2=-2\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$ у прву једначину система. Имамо

$x_1+2\left(-2\alpha\right)+3\alpha=0 \Leftrightarrow x_1-4\alpha+3\alpha=0 \Leftrightarrow x_1=\alpha$.

Коначно, рјешење система је уређена тројка $\left(\alpha,-2\alpha,\alpha\right)$гдје је $\alpha\in\mathbb{R}$ произвољно.

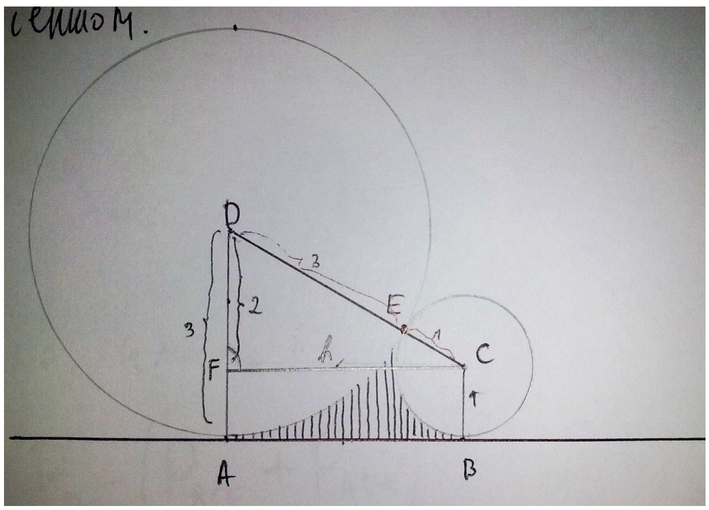
8. Доказати једнакост $\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 2x-\sin 4x}=tg3x$.

РЈЕШЕЊЕ

$$\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 2x-\sin 4x}=\frac{-\cancel{2}\sin\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}{\cancel{2}\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)}=\frac{\cancel{-}\sin 3x\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin(-x)}\cos 3x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=tg3x$$

9. Двије кружнице (полупречника $3cm$ и $1cm$) додирују се споља. Повучена је њихова спољна заједничка тангента. Одредити површину површи ограничене кружницама и тангентом.

РЈЕШЕЊЕ



Тражену површину наћи ћемо ако од површине трапеза $ABCD$ одузмемо површине кружних исјечака ADE и BCE.

Одредимо прво површину трапеза : $P_{trap}=\frac{|AD|+|BC|}{2}\cdot h$ гдје је h висина трапеза.

Висину h одредићемо из $\triangle CDF$ - правоугли троугао.

$h^2=4^2-2^2=16-4=12\Rightarrow \boxed{h=2\sqrt{3}}$

$P_{trap}=\frac{3+1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\Rightarrow \boxed{P_{trap}=4\sqrt{3}}$

Троугао $\triangle CDF$ је очигледно половина једнакостраничног троугла па су му углови $\measuredangle FDC=60^o$ $\measuredangle DCF=30^o$ $\Rightarrow \measuredangle BCD=120^o$. Одавде добијамо површине кружних исјечака

$$P_{BCE}=\frac{r^2\pi\cdot\alpha}{360^o}=\frac{1^2\pi\cdot\cancel{120^o}}{\cancel{360^o}}=\frac{\pi}{3}$$

$$P_{ADE}=\frac{r^2\pi\cdot\alpha}{360^o}=\frac{3^2\pi\cdot\cancel{60^o}}{\cancel{360^o}}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$$

Коначно имамо $P = P_{trap} - \left(P_{BCE} + P_{ADE}\right) = 4\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) = 4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}$

$\boxed{P = 4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}}$ $P = 1{,}16\, cm^2$

10. Израчунати површину троугла $\triangle ABC$ ако је $a + b = 8,\ c = 7,\ \gamma = 120^o$.
    Напомена: користити косинусну и синусну теорему.

РЈЕШЕЊЕ

Према косинусној теореми је

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$c^2 = a^2 + 2ab - 2ab + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$c^2 = \left(a + b\right)^2 - 2ab\left(1 + \cos\gamma\right)$

$\cos 120^o = -\frac{1}{2},\ \sin 120^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Сада је

$7^2 = 8^2 - 2ab\left(a + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow \boxed{a \cdot b = 15}$

Остаје још да израчунамо површину по формули $\boxed{P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}$

$P = \frac{1}{2}15\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

Квалификациони испит одржан 8. октобра 2010.

1. Доказати да је вриједност израза $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ цијели број.

РЈЕШЕЊЕ

Обије поткорјене величине су позитивне па су оба сабирка позитивни реални бројеви. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=k>0\ /^2$

$$11+6\sqrt{2}+2\sqrt{\left(11+6\sqrt{2}\right)\left(11-6\sqrt{2}\right)}+11-6\sqrt{2}=k^2$$

$$22+2\sqrt{121-72}=k^2$$

$$22+2\sqrt{49}=k^2$$

$$36=k^2$$

$$k=6$$

2. За које $a,b,c\in\mathbb{Z}$ функција $f(x)=ax^2+bx+c,\ x\in\mathbb{Z}$ задовољава услов

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$$

РЈЕШЕЊЕ

$$f(x+y)=a(x+y)^2+b(x+y)+c=a\left(x^2+2xy+y^2\right)+bx+by+c$$

$$=ax^2+2axy+ay^2+bx+by+c+c-c=f(x)+f(y)+2axy-c$$

Са друге стране је $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$

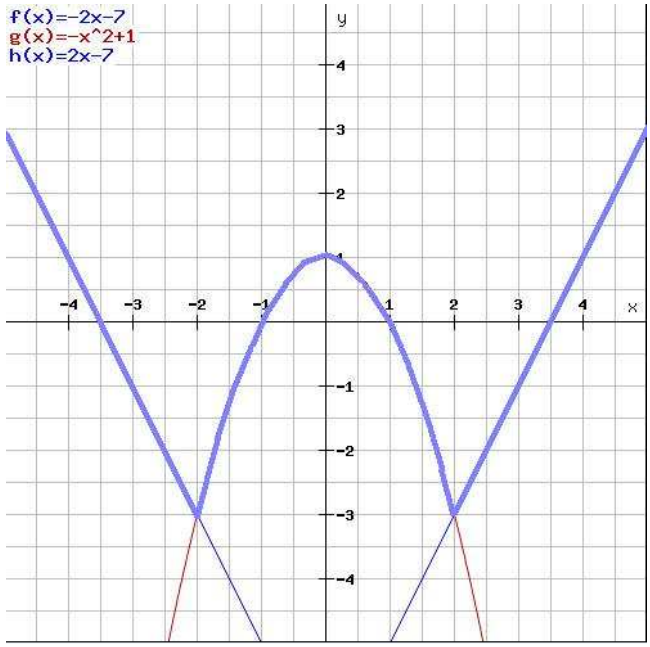
Одатле добијамо $2axy-c=xy\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}\wedge c=0\wedge b\in\mathbb{R}$

3. Нацртати график функције

$$f(x)=\begin{cases}-2x-7, x<-2\\ -x^2+1, |x|\leq 2\\ 2x-7, x>2\end{cases}$$

Па одредити скуп $\{x: f(x)=0\}$.

РЈЕШЕЊЕ



$$\left\{x : f(x) = 0\right\} = \left\{-\frac{7}{2}, -1, 1, \frac{7}{2}\right\}$$

4. Риjешити jедначину $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3} = \frac{7}{\sqrt{x-3}}$.

РJЕШЕЊЕ

Jеднакост има смисла само за $x \neq 3$

$$\sqrt{x^2-16} + \sqrt{x^2-9} = 7 \;/^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16 + 2\sqrt{\left(x^2-16\right)\left(x^2-9\right)} + x^2 - 9 = 49$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2\sqrt{\left(x^2-16\right)\left(x^2-9\right)} = 74 \;/\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \sqrt{\left(x^2-16\right)\left(x^2-9\right)} = 37$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-16\right)\left(x^2-9\right)} = 37 - x^2 \;/^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-16\right)\left(x^2-9\right) = 37^2 - 2\cdot 37x^2 + x^4$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^4} - 25x^2 + 144 = 37^2 - 74x^2 + \cancel{x^4}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{49}x^2 = 37^2 - 12^2 = (37-12)(37+12) = 25\cdot\cancel{49}$$

$\Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow \boxed{x = 5 \vee x = -5}$

5. Riјешити неједначину $\log_{7-x}\left(x^2 - 4x - 5\right) < 1.$

6. Riјешити једначину $\sin x - \cos x = 1.$

РЈЕШЕЊЕ

$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

7. Riјешити систем
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$$

РЈЕШЕЊЕ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = -20 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 40 \end{cases}$$

А одавде лако добијамо

$x_4 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 2$

8. Доказати идентитет $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$

РЈЕШЕЊЕ

$\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1 + 2 =$

$\cos^2 2\alpha + 1 - \sin^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 2 = \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 2 =$

$2\left[\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1\right] = 2\left[\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)^2 + 2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 1\right] =$

$2\left[\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha + 2\cos^2 - 2\sin^2\alpha + 1\right] =$

$2\left[\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] =$

$2\left[\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right) + 3\cos^2\alpha\right] =$

$2\left[\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha\right] = 2\left[\cos^4\alpha + 3\cos^2\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right)\right] =$

$$2\left[\cos^4\alpha+3\cos^4\alpha\right]=2\left[4\cos^4\alpha\right]=8\cos^4\alpha$$

9. Израчунати странице a,b,c троугла ако је $a+b=7,\ \gamma=60^o,\ P=3\sqrt{3}$

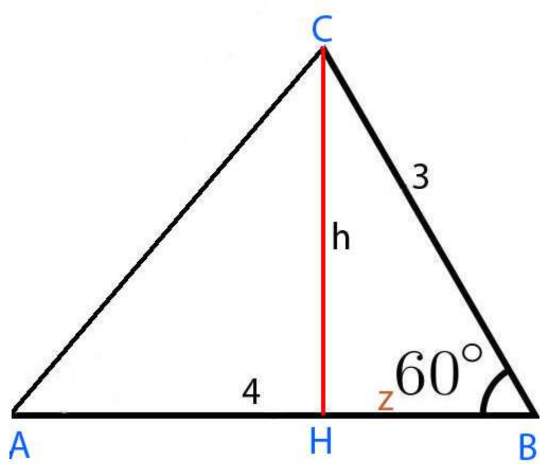
РЈЕШЕЊЕ

$$P=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{ab\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=3\sqrt{3}$$

Одавде добијамо систем $\begin{cases}a\cdot b=12\\ a+b=7\end{cases}$ који има два рјешења

$$(a_1=4\wedge b_1=3)\vee(a_2=3\wedge b_2=4)$$

Да бисмо израчунали трећу страницу морамо прво израчунати висину (види слику)



$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{h}{3}\Leftrightarrow h=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Одавде је $\frac{z}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ одакле добијамо $z=\frac{3}{2}$.

Дакле, $|AH|=4-z=\frac{5}{2}$.

Остаје да из троугла АНС користећи Питагорину теорему израчунамо $c=\sqrt{13}$.

10. Одредити једначину кружнице која пролази кроз координатни почетак, а праве $3x-4y+8=0$ и $3x+4y+8=0$ су јој тангенте.